COURS

Graphes

Modéliser un réseau social à l'aide d'un graphe et étudier sommets, arêtes, chemins, distances et représentations en machine.

I. Définitions

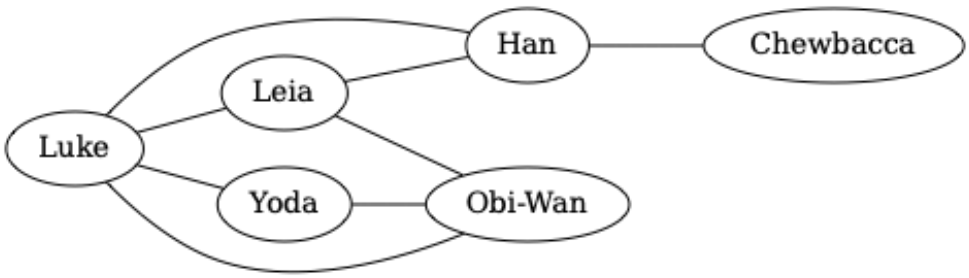
> **Définition - Graphe**
>
> **Ensemble de sommets reliés entre eux par des arêtes.**
>
> Un **graphe** est un ensemble de nœuds appelés **sommets**, reliés entre eux par des **arêtes**.

Dans un réseau social, les sommets peuvent représenter les utilisateurs et les arêtes les relations entre ces utilisateurs.

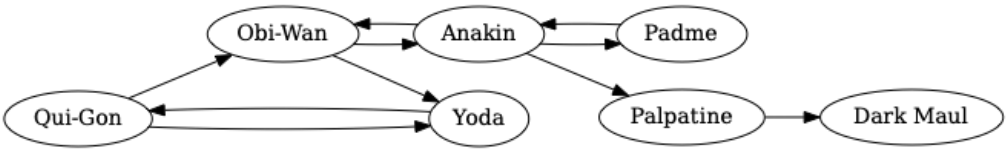
> **Définition - Graphe orienté**
>
> **Graphe dont les relations possèdent un sens.**
>
> Un **graphe orienté** est un graphe dans lequel les arêtes ont un sens. Nous parlons alors d'**arcs**.

Un graphe dont les arêtes n'ont pas de sens est appelé **graphe non orienté**.

Graphe n°1



Graphe n°2



Application 1 — Identifier un graphe

1. Quel est le type du graphe n°1 ?
2. Quel est le type du graphe n°2 ?
3. Donner la liste des sommets du graphe n°1.
4. Donner la liste des sommets du graphe n°2.
5. À quel type de graphe le réseau social Facebook correspond-il le mieux ? Justifier.
6. À quel type de graphe le réseau social Twitter correspond-il le mieux ? Justifier.

□ Je sais reconnaître un graphe orienté ou non orienté et identifier ses sommets et ses relations.

II. Voisins, chemins et distances

Définition - Sommets adjacents

Deux sommets reliés directement par une arête ou un arc.

Deux sommets d'un graphe sont **adjacents**, ou **voisins**, s'il existe une arête entre ces deux sommets.

Dans un graphe orienté, le sommet `b` est adjacent du sommet `a` s'il existe un arc allant de `a` vers `b`.

Définition - Chemin

Suite de sommets adjacents permettant d'aller d'un sommet à un autre.

Un **chemin** reliant un sommet `a` à un sommet `b` est une suite de sommets adjacents consécutifs commençant par `a` et finissant par `b`.

Définition - Longueur d'un chemin

Nombre d'arêtes ou d'arcs parcourus sur le chemin.

La **longueur d'un chemin** est le nombre d'arêtes, ou d'arcs, parcourus pour aller du sommet de départ au sommet d'arrivée.

Définition - Distance

Longueur du plus court chemin reliant deux sommets.

La **distance** entre deux sommets `a` et `b` est la longueur du plus court chemin reliant `a` à `b`.

Exemple

Dans le graphe n°1, le chemin `Luke → Han → Chewbacca` a une longueur de `2`.

Application 2 — Parcourir un graphe

1. Donner les sommets adjacents à `Luke` dans le graphe n°1.
2. Donner les sommets adjacents à `Anakin` dans le graphe n°2, en respectant le sens des arcs.
3. Donner trois chemins possibles reliant `Luke` à `Chewbacca` dans le graphe n°1.
4. Donner un chemin reliant `Anakin` à `Dark Maul` dans le graphe n°2.
5. Donner la longueur des chemins trouvés.
6. En déduire la distance entre `Luke` et `Chewbacca`.
7. En déduire la distance entre `Anakin` et `Dark Maul`.

□ Je sais déterminer les voisins d'un sommet, proposer un chemin et calculer une distance.

III. Représentations des graphes en machine

Les graphes peuvent être représentés en machine de deux façons différentes :

- par **matrice d'adjacence** ;
- par **liste d'adjacence**.

A. Matrice d'adjacence

> **Définition - Matrice d'adjacence**
>
> **Tableau carré indiquant quels sommets sont adjacents.**
>
> Une **matrice d'adjacence** est un tableau à deux dimensions de taille `N × N` pour un graphe comprenant `N` sommets.
>
> Dans chaque case, nous indiquons par une croix si le sommet de la colonne est adjacent au sommet de la ligne.

Le graphe n°1 peut être représenté par la matrice d'adjacence suivante :

	Luke	Leia	Han	Yoda	Chewbacca	Obi-Wan
Luke		X	X	X		X
Leia	X		X			X
Han	X	X			X	
Yoda	X					X
Chewbacca			X			
Obi-Wan	X	X		X		

> **À retenir**
>
> Dans un graphe non orienté, la matrice d'adjacence est symétrique : si `A` est adjacent à `B`, alors `B` est aussi adjacent à `A`.

B. Liste d'adjacence

> **Définition - Liste d'adjacence**
>
> **Pour chaque sommet, liste des sommets accessibles directement.**
>
> Une **liste d'adjacence** associe à chaque sommet la liste de ses voisins.

Le graphe n°2 peut être représenté par la liste d'adjacence suivante :

```text
Qui-Gon : Obi-Wan, Yoda
Obi-Wan : Anakin, Yoda
Anakin : Obi-Wan, Padme, Palpatine
Padme : Anakin
Yoda : Qui-Gon
Palpatine : Dark Maul
Dark Maul : aucun sommet
```

Application 3 — Changer de représentation

1. Donner la matrice d'adjacence du graphe n°2.
2. Donner la liste d'adjacence du graphe n°1.

- [ ] Je sais représenter un graphe par une matrice d'adjacence ou une liste d'adjacence.

IV. Excentricité, diamètre, centre et rayon

Définition - Excentricité

Plus grande distance entre un sommet et les autres sommets du graphe.

L'**excentricité** d'un sommet est la plus grande distance entre ce sommet et tous les autres sommets du graphe.

Définition - Diamètre

Plus grande excentricité parmi les sommets du graphe.

Le **diamètre** d'un graphe est la plus grande excentricité de ses sommets.

Définition - Centre

Sommet ou sommets dont l'excentricité est minimale.

Le **centre** d'un graphe est constitué du ou des sommets dont l'excentricité est la plus petite.

Définition - Rayon

Plus petite excentricité parmi les sommets du graphe.

Le **rayon** d'un graphe est l'excentricité du centre du graphe.

Application 4 — Étudier les distances du graphe n°1

Compléter le tableau des distances du graphe n°1.

	Luke	Leia	Han	Yoda	Chewbacca	Obi-Wan
Luke						
Leia						
Han						
Yoda	1	2	2	0	3	1
Chewbacca						
Obi-Wan						

Puis :

1. Donner l'excentricité de chaque sommet.
2. En déduire le diamètre du graphe n°1.
3. Donner le centre du graphe n°1.
4. Donner le rayon du graphe n°1.

□ Je sais utiliser les distances pour déterminer excentricité, diamètre, centre et rayon.

V. Représentation sagittale d'un graphe

Une matrice d'adjacence permet également de reconstruire la représentation d'un graphe.

Application 5 — Construire un graphe à partir d'une matrice

Représenter sur feuille le graphe correspondant à la matrice d'adjacence suivante.

	Frodo	Sam	Gandalf	Aragorn	Legolas	Gimli	Boromir
Frodo		X	X	X			
Sam	X						
Gandalf	X			X			

Application 5 — Construire un graphe à partir d'une matrice

	Frodo	Sam	Gandalf	Aragorn	Legolas	Gimli	Boromir
Aragorn	X		X		X	X	X
Legolas				X		X	X
Gimli				X	X		
Boromir				X	X		

- [ ] Je sais construire un graphe à partir d'une matrice d'adjacence.